Algèbre linéaire - MATH111(f)

Semestre d'automne — 2025-2026

Série 11: Valeurs et vecteurs propres

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) continuer à **calculer le polynôme caractéristique, les valeurs et les espaces propres** d'une matrice carrée ;

(O.2) **déterminer si une matrice est diagonalisable**, et la **diagonaliser** si possible ;

(O.3) utiliser la diagonalisation pour **calculer des puissances** d'une matrice.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- trace d'une matrice
- matrice diagonalisable
- diagonalisation d'une matrice
- multiplicité algébrique
- multiplicité géométrique

Noyau d'exercices

1.1 L'application trace

Exercice 1 (Définition et premières propriétés I)

Pour le noyau : items (a), (b) et (d).

Un peu de théorie

(a) Montrer que Tr est une application linéaire.

(b) Montrer que $\mathrm{Tr}(A^{\mathsf{T}}) = \mathrm{Tr}(A)$ pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Plus difficile !

(c) Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(d) Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) \neq \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$ en général.

1.2 Multiplicités algébriques et géométriques

Pour le noyau : matrices A, B et C.

Exercice 2 (Calculs de valeurs et vecteurs propres)
Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune des matrices précédentes, calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres.

1.3 Diagonalisation et puissances de matrices

Exercice 3 (Diagonalisation d'une puissance I)
Soit P une matrice carrée inversible de taille n et D une matrice carrée diagonale de taille n. On pose $A = PDP^{-1}$. Montrer que $A^2 = PD^2P^{-1}$, et déduire une formule qui permet de calculer A^k pour tout entier $k \geq 2$.

Exercice 4 (Diagonalisation I)
Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer les valeurs propres de A.

(b) Calculer les vecteurs propres de A.

(c) Soit P la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A (associés à des valeurs propres différentes). Calculer $P^{-1}AP$, et interpréter le résultat.

(d) Calculer A^{1000}.

Pour le noyau : matrices B et C.

Exercice 5 (Diagonalisation II)
Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ \text{et } D = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les matrices qui sont diagonalisables.

Pour le noyau : matrices A, C et D.

Exercice 6 (Diagonalisation III)
Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indiquer celles qui sont diagonalisables (toujours en justifiant), et le cas échéant, diagonaliser ces matrices et exhiber les vecteurs propres.

Exercice 7 (Diagonalisation d'une application entre matrices)
Soit $\mathsf{Sym}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées symétriques de taille 2, dont une base (ordonnée) est donnée par

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Soit $T : \mathsf{Sym}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{Sym}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - d & -b \\ -b & -a + 2d \end{pmatrix}$$

pour tous $a, b, d \in \mathbb{R}$.

(a) Calculer les 3 valeurs propres (distinctes) $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ de T.

(b) Trouver un vecteur propre $M_i \in \mathsf{Sym}_2(\mathbb{R})$ associé à chaque valeur propre λ_i. Montrer que $\mathscr{B}' = \{M_1, M_2, M_3\}$ est une base de $\mathsf{Sym}_2(\mathbb{R})$.

(c) Écrire la représentation matricielle de T relative à la base $\mathscr{B}'$.

(d) Calculer $T^{10}(A)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour compléter la pratique

2.1 L'application trace

Exercice 8 (QCM sur l'application trace)
Résoudre les QCM dans les items suivants, où chaque QCM n'admet qu'une seule réponse correcte.

(a) Le noyau de l'application $\mathsf{Tr} : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension

☐ 1 ; ☐ 2 ; ☐ 3 ; ☐ 4.

(b) Le noyau de l'application $\mathsf{Tr} : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ admet la base

- ☐ $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$;
- ☐ $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$;
- ☐ $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$;
- ☐ $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$.

2.2 Diagonalisation et puissances de matrices

Exercice 9 (Diagonalisation d'une puissance II)
Démontrer ou trouver un contre-exemple aux affirmations suivantes :

(a) Si A est une matrice carrée de taille n diagonalisable, alors A^k est diagonalisable pour tout entier $k \geq 2$.

(b) Si A est une matrice carrée de taille n et A^k est diagonalisable pour un entier $k \geq 2$, alors A est diagonalisable.

Exercice 10 (Valeurs propres de matrices diagonalisables de taille 2)
Existe-t-il une matrice

$$A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

avec $b \neq 0$, diagonalisable et ne possédant qu'une seule valeur propre de multiplicité 2 ?

Exercice 11 (V/F sur diagonalisation I)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
(a) Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles ont les mêmes valeurs propres.	☐	☐
(b) Pour qu'une matrice de taille $n \times n$ soit diagonalisable il faut qu'elle ait au moins n valeurs propres distinctes.	☐	☐
(c) Si v_1 et v_2 sont deux vecteurs propres linéairement indépendants, alors leur valeurs propres associées sont différentes.	☐	☐
(d) Étant donné trois matrices A, B et C, si A est équivalente à B, et B est équivalente à C, alors A est équivalente à C.	☐	☐

Exercice 12 (V/F sur diagonalisation II)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
(a) Un espace propre d'une matrice carrée A de taille n est le noyau d'une certaine matrice.	☐	☐

(b) Pour une matrice carrée A, si A^2 est la matrice nulle, alors la seule valeur propre de A est 0. ☐ ☐

(c) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale principale. ☐ ☐

(d) L'ensemble $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ d'une matrice carrée A est linéairement dépendant. ☐ ☐

Exercice 13 (V/F sur diagonalisation III)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

(a) Une matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si elle possède n valeurs propres distinctes. ☐ ☐

(b) Une matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable si elle possède n valeurs propres distinctes. ☐ ☐

(c) Si une matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors elle est inversible. ☐ ☐

(d) Si une matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est inversible, alors elle est diagonalisable. ☐ ☐

(e) Si 0 est une valeur propre d'une matrice $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, alors $\operatorname{rang}(A) < n$. ☐ ☐

(f) Étant donné $A, P \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ avec P inversible, $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $P^{-1}AP$. ☐ ☐

2.3 Diagonalisation dans le cas complexe

Le cas de B est difficile.

Exercice 14 (Diagonalisation complexe I)
Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer les valeurs propres complexes de A et de B.

(b) Calculer les vecteurs propres complexes de A et de B.

(c) Soit P et Q les matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres de A et de B, respectivement (associés à des valeurs propres différentes). Calculer $P^{-1}AP$ et $Q^{-1}BQ$ et interpréter le résultat.

Exercice difficile.

Exercice 15 (Diagonalisation complexe II)
Soit A une matrice de taille 3×3 à coefficients réels telle que $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 2e^{i\pi/3}$ sont valeurs propres de A avec vecteurs propres

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

respectivement. Calculer A.

Indication : On rappelle les identités

$$e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3} = 2\frac{e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}}{2} = 2\cos(\pi/3) = 2\frac{1}{2} = 1,$$

$$-ie^{i\pi/3}+ie^{-i\pi/3}=-i2\frac{e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3}}{2}=2\sin(\pi/3)=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$